E.N. METEO — Epreuve de MATHEMATIQUES II (4 h) — 1982

Note : Les candidats doivent traiter les deux problèmes. La rigueur des démonstrations et la clarté de la présentation joueront un rôle important dans l'appréciation des copies.

PROBLEME 1

L'objet du problème est l'étude des séries de terme général $(u_n)^\alpha$ où u_n est défini par u_o et la relation $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall\, n > 0$

Par étude d'une série, on entend détermination de sa convergence ou divergence.

Soit Ho l'ensemble des hypothèses suivantes applicables dans les parties I, II et III

H_o :
- a) $0 < u_o < 1$
- b) f : application de $[0,1]$ dans $[0, 1]$, croissante, continue en 0^+
- c) $f(0) = 0$
- d) $\alpha > 0$

I - 1°) u_n admet-il une limite si n tend vers $+\infty$?

2°) on suppose que f admet une demie dérivée en 0^+ de valeur $\lambda = \lim_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} \frac{f(x)}{x}$

a) étudier la série (u_n^α) si $\lambda \neq 1$

b) peut on conclure si $\lambda = 1$?

II - On suppose vérifiées en plus de Ho, les hypothèses H_1 :

H_1 :
- a) $u_n \to 0$ si n tend vers $+\infty$
- b) $f(x) = x\,(1 - g(x))$, $0 < g(x) < 1$ si $0 < x < 1$
- c) $g(x) \to 0$ si x tend vers 0

1°) Etudier la série (v_n) de terme général $v_n = g(u_n)$

(on pourra comparer v_n et $r_n = \mathrm{Log}\,(1 - v_n)$ et exprimer la somme $R_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$)

2°) Etudier la série (w_n) de terme général $w_n = u_n . v_n$

(on pourra exprimer la somme $W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$)

III - On suppose vérifiées en plus des hypothèses Ho et H_1, les hypothèses H_2

H_2 :
- a) $g(x).x^{-b} \to d$ si x tend vers 0
- b) $d > 0$, $b > 0$

1°) Etudier la série (s_n) de terme général $s_n = u_n^{b+c}$ où c est un réel non nul.

(on pourra comparer s_n et $t_n = u_{n+1}^c - u_n^c$)

2°) Etudier la série (r_n) de terme général $r_n = u_n^b$

(on pourra étudier $y_n = u_{n+1}^{-b} - u_n^{-b}$)

IV - Etudier la série (y_n) de terme général $y_n = u_n^\alpha$ dans chacun des cas suivants :

(on pourra utiliser les résultats de I, II, et III).

1- $u_o \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \sin(\mathrm{sh}(u_n))$ $\quad \alpha = 1$

2- $u_o \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \mathrm{sh}(\sin(u_n))$ $\quad \alpha = 1$

3- $u_o \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctg}(u_n)$ $\quad \alpha > 0$

4- $u_o \in \mathbb{R}_+^*$, $u_{n+1} = \mathrm{Log}(1+u_n)$ $\quad \alpha > 0$

5- $u_o \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \sin^p(u_n^{1/p})$ $\quad p > 0$, $\alpha > 0$

PROBLEME 2

Notations et conventions:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, de dimension finie. On note L(E,F) l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications linéaires de E dans F. Si u appartient à L(E,F) on note classiquement:

- tr (u) = trace de u
- rg (u) = rang de u
- Ker(u) = noyau de u
- Im (u) = image de E par u
- i_E = application linéaire identité de L(E,E)

.../...

Une matrice A sur $\mathbb{C}$ d'éléments a_{ij} $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$ s'écrit en considérant le 1er indice comme indice de ligne et le 2ème comme indice de ligne;on dira qu'une telle matrice est une (m x n) matrice.

Le produit de deux matrices s'effectue en multipliant les lignes de la première par les colonnes de la seconde;on aura ,si C = A.B $C=(c_{ij})$, $A=(a_{k\ell})$, $B=(b_{pq})$:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}\, b_{kj}$$

La matrice transconjuguée de la (m x n) matrice A est une (n x m) matrice $\overline{A}$ d'éléments:

$\overline{A} = (b_{k\ell})$, $A = (a_{ij})$: $b_{pq} = \overline{a}_{qp}$ $p=1,\ldots,n$; $q=1,\ldots,m$; $\overline{a}_{pq}$ conjugué de a_{pq}

I- Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ de dimensions finies respectivement n et m

1- Soit u un élément de L(E,E) tel que uou = u ; on pose $v = i_E - u$.

a) Comparer Im(u) et Ker(v) puis Im(v) et Ker(u).

b) Etudier la somme des deux sous-espaces Im(u) et Im(v).

c) u est-il diagonalisable?

d) Comparer tr(u) et rg(u).

2- Soient u un élément de L(E,F) et v un élément de L(F,E) tels que :

$$u \circ v \circ u = u$$

$$v \circ u \circ v = v$$

a) Etudier la somme des sous-espaces vectoriels Im(v) et Ker(u)

b) Comparer rg(u) , rg(v) , rg(u o v) et tr(v o u)

3- Soient u un élément de L(E,F) , E_1 un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de Ker(u) dans E et F_1 un sous-espace vectoriel supplémentaire de Im(u) dans F.

On cherche les éléments v de L(F,E) satisfaisant à:

$$u \circ v \circ u = u$$

$$v \circ u \circ v = v$$

$$\mathrm{Ker}(v) = F_1$$

$$\mathrm{Im}(v) = E_1$$

a) Existe-t-il un tel élément v de L(F,E)? Est-il unique?

b) Etudier le cas particulier : E=F avec u inversible.

II- Soit V l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des (n x 1) matrices (ou matrices colonne) à éléments dans $\mathbb{C}$.

1- Soit V_1 un sous-espace vectoriel de V. Montrer que l'ensemble V_2 des vecteurs Y de V satisfaisant à $\overline{Y}.X = 0$, $\forall X \in V_1$ est un sous-espace vectoriel de V. Etudier la somme de V_1 et V_2 . On dira que V_2 est l'orthogonal de V_1 dans V.

2- Soit A une (m x n) matrice à éléments dans $\mathbb{C}$. Démontrer l'équivalence

$$A = \overline{A} \iff \overline{Y}.(A.X) = (A.\overline{Y}).X \qquad \forall X \in V \ , \forall Y \in V$$

3- Soit A une (m x n) matrice à éléments dans $\mathbb{C}$. On cherche les (n x m) matrices B à éléments dans $\mathbb{C}$ satisfaisant à:

$$A.B.A = A$$

$$B.A.B = B$$

$$\overline{A.B} = A.B$$

$$\overline{B.A} = B.A$$

a) Démontrer l'existence et l'unicité de la matrice B; on la notera $A^{(-1)}$ ou pseudo-inverse de A.(On pourra utiliser les résultats obtenus en I-3 en précisant les choix de E , F , E_1 , F_1 , ...)

b) Etudier le cas particulier : m=n , A inversible.

4- Quelles sont les pseudo-inverses des matrices :

$$A^{(-1)} \ , \ \overline{A} \ , \ \overline{A}.A \ , \ aA \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{C}$$

5- Expliciter $A^{(-1)}$ pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail